PARAMETRLI CHIZIQLI TENGLAMALARGA KELTIRILADIGAN AYRIM MASALALAR

Husenova Jasmina To'lqinovna
Buxoro davlat universiteti, Buxoro, O'zbekiston
E-mail: j.t.husenova@buxdu.uz

Annotatsiya. Ushbu maqolada parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega bo'lish shartlari, ularni yechishga oid tenglamalardan namunalar, bunday ma'lumotlarning zamonaviy matematika masalalarida qo'llanilishi bayon qilingan. Xususan, funksional tenglamalarning muhim sinfi bo'lgan integral tenglamalarni yechishda hamda Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorning spektr va rezolventasini topishda tadbiq qilinishiga oid bir nechta masalalar keltirilgan. O'quvchilar mustaqil o'rganishlari uchun bir qator masalalar taklif qilingan.

Kalit so'zlar: parametr, tenglama, sonli va harfiy ifodalar, yechim, zamonaviy matematika, masala.

Kirish. Maktab matematika kursidan bizga yaxshi ma'lumki [1], sonlar, arifmetik amallar va qavslardan tuzilgan ifodalarga sonli ifodalar deyiladi. Sonli ifodada berilgan amallar bajarilsa, sonli ifodaning qiymati hosil bo'ladi. Agar sonli ifodalarda harflar ham ishtirok etsa, unga harfiy ifodalar paydo bo'ladi. Ikkita sonli ifodalarning "=" belgisi bilan bog'lanishi tengliklar deyiladi. Tengliklardagi ifodalarning qiymati o'zaro teng bo'ladi. Noma'lum son qatnashgan tenglikga tenglama deyiladi. Noma'lumning berilgan tenglamani to'g'ri tenglikga aylantiradigan qiymatiga tenglamaning ildizi (yechimi) deyiladi. Tenglamani yechish deganda, tenglamaning hamma ildizlarini topish (yoki ildizi yo'qligini ko'rsatish) tushiniladi.

Umumta'lim maktablari, akademik litsey va kasb-hunar maktablari matematika kursida parametr qatnashgan ifodalar, parametr qatnashgan tenglamalar, parametr qatnashgan tenglamalar sistemasi, parametr qatnashgan tengsizliklar va parametr qatnashgan funksiyalar o'rganiladi.

$ax = b$ ko'rinishdagi tenglamaga parametrli chiziqli tenglama deyiladi. Bunda a va b parametrlar haqiqiy sonlar, x esa no'malum (izlanayotgan o'zgaruvchi) [2]. Parametrli tenglamalarni yechish usullarini tadqiq qilish algebraning ko'p o'rganilayotgan ob'yektlaridan biri hisoblanadi. Buyuk alloma yurtdoshimiz Abu Abdulloh Muhammad ibn Muso al-Xorazmiyning "Al-jabr val-muqobala" asarida tenglamalarni yechish usullari to'liq bayon qilingan. "Algebra" so'zi asar nomidagi "al-jabr" so'zidan vujudga kelgan.

Asosiy qism. Quyida parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega yoki ega emasligini a va b parametrlarga bog‘liq ravishda tahlil qilamiz.

1) Agar $a = b = 0$ shart bajarilsa, u holda $ax = b$ tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega.

2) Agar $a \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim $x = \frac{b}{a}$ ko‘rinishda bo‘ladi.

3) Agar $a = 0$, $b \neq 0$ bo‘lsa, u holda $ax = b$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

Dastlab $ax = b$ tenglama va uning yechilishiga doir uch turdagi masalani qarab chiqamiz.

1-masala. Ushbu

$$\frac{2kx + 3}{3} = \frac{k - 2 + x}{2}$$

tenglama k parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega emas?

Yechish. Avvalo bu tenglamaning hadlarini ixchamlashtiramiz:

$$2(2kx + 3) = 3(k - 2 + x);$$
$$4kx + 6 = 3k - 6 + 3x;$$
$$4kx - 3x = 3k - 12;$$
$$(4k - 3)x = 3k - 12.$$

Ko‘rinib turibdiki, agar $k = 3/4$ bo‘lsa, u holda $4k - 3 = 0$ va $3k - 12 \neq 0$. Shu sababli, agar $k = 3/4$ bo‘lsa, u holda berilgan tenglama yechimga ega bo‘lmaydi.

2-masala. Ushbu

$$(a^2 - 2)x = a(x - a) + 4 \tag{1}$$

tenglama a parametrning qanday qiymatlarida cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

Yechish. Avvalo berilgan tenglamada shakl almashtirib, uning hadlarini ixchamlashtiramiz:

$$a^2x - 2x = ax - a^2 + 4;$$
$$a^2x - 2x - ax = 4 - a^2;$$
$$(a^2 - a - 2)x = 4 - a^2. \tag{2}$$

(1) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lishi uchun (2) tenglikda bir vaqtda $a^2 - a - 2 = 0$ va $a^2 - 4 = 0$ tengliklarning bir vaqtda bajarilishi zarur va yetarlidir.

$a^2 - a - 2 = 0$ tenglamani yechib $a_1 = 2$ va $a_2 = -1$ ekanligini hosil qilamiz. Xuddi shuningdek, $a^2 - 4 = 0$ tenglamani yechib $a_3 = 2$ va $a_4 = -2$ ekanligini hosil qilamiz.

Demak, a parametrning $a = 2$ qiymatida (1) tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

3-masala. Ushbu

$$(n^2 - 3n - 3)y = y - 5 \tag{3}$$

tenglama n parametrning qanday qiymatlarida yagona yechimga ega bo‘ladi.

Yechish. (3) tenglamani shakl almashtirish yordamida soddalashtiramiz:

$$n^2y-3ny-3y-y=5;$$
$$(n^2-3n-4)y=-5.$$

(3) tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi uchun $n^2-3n-4\neq 0$ bo‘lishi zarur va yetarlidir. Sodda hisoblashlar yordamida (3) tenglama yagona yechimga ega bo‘lishi uchun $n\neq 4$ va $n\neq -1$ shartlar bajarilishi zarur va yetarli ekanligini hosil qilamiz.

Quyidagi masalalarni o‘quvchilar mustaqil ishlashlari uchun tavsiya qilamiz.

4-masala. m parametrning qanday qiymatlarida $m^2x-m=x+1$ tenglamaning ildizlari cheksiz ko‘p bo‘ladi?

5-masala. $2{,}5(ax-5{,}2)=2a-5x-9$ tenglama a parametrning qanday qiymatlarida yagona yechimga ega?

6-masala. $6x-a-6=(a+2)(x+2)$ tenglama a parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega emas?

7-masala. $(a^2-1)x+3=0$ tenglama yechimga ega bo‘lmaydigan a parametrning barcha qiymatlari yig‘indisini hisoblang.

8-masala. $(k^2-4k+2)x=k-x-3$ yoki $(k+2)x-1=k+x$ tenglama cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladigan k parametrning nechta qiymati mavjud.

9-masala. Ushbu

$$\frac{3b-2}{x-1{,}5}=2b$$

tenglama b parametrning qanday qiymatlarida manfiy yechimga ega bo‘ladi?

Endi zamonaviy matematikada ko‘p uchraydigan ikkita masalani tahlil qilishda parametrli chiziqli tenglama yechimining mavjudlik shartlardan foydalanishga to‘xtalib o‘tamiz.

Birinchi masala integral tenglamalar bilan bog‘liq. Funksiyalardan tashkil topgan to‘plamga funksional to‘plam deyiladi. $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha uzluksiz funksiyalar to‘plami, $[a,b]$ kesmada aniqlangan barcha chegaralangan funksiyalr to‘plami funksional to‘plamlarga misol bo‘la oladi. Agar funksional to‘plamda berilgan tenglamada noma’lum funksiyadan iborat bo‘lsa bu tenglamaga funksional tenglama deyiladi. Funksional tenglamalarning muhim sinflaridan biri bu integral tenglamadir. Agar funksional tenglamada noma’lum funksiya integral ostida bo‘lsa, u holda tenglamaga integral tenglama deyiladi. Masalan,

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,t)g(\varphi(t),t)dt$$

tenglamaga φ ga nisbatan integral tenglamadir, $K(\cdot,\cdot)$ va $g(\cdot,\cdot)$ – berilgan funksiyalar.

10-masala. Ushbu

$$\varphi(x)-\gamma x\int_0^1(1+t)\varphi(t)dt=x^2 \tag{4}$$

integral tenglama $\gamma\in C$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz koʻp. Yechim mavjud boʻlgan hollarda yechimni toping.

Berilgan (4) integral tenglamani yechish maqsadida

$$I=\int_0^1(1+t)\varphi(t)dt \tag{5}$$

belgilash kiritamiz hamda $\varphi(x)$ uchun

$$\varphi(x)=\gamma xI+x^2 \tag{6}$$

ifodani hosil qilamiz. $\varphi(x)$ uchun topilgan (6) ifodani (5) belgilashga qoʻyamiz:

$$I=\int_0^1(1+t)(\gamma tI+t^2)dt\,;$$

$$I=\int_0^1(1+t)\gamma tdt\cdot I+\int_0^1(1+t)t^2dt;$$

$$I=\left(\frac{1}{2}+\gamma\frac{1}{3}\right)I+\frac{1}{3}+\frac{1}{4};$$

$$\frac{3-2\gamma}{6}\cdot I=\frac{7}{12};$$

$$(3-2\gamma)I=\frac{7}{2}.$$

γ parametrga nisbatan hosil boʻlgan parametrli chiziqli tenglamani tahlil qilamiz.

Agar $\gamma=\frac{3}{2}$ boʻlsa, u holda berilgan integral tenglama yechimga ega boʻlmaydi.

Aksincha, agar $\gamma\neq\frac{3}{2}$ boʻlsa, u holda

$$I=\frac{7}{2(3-2\gamma)}$$

boʻlib, berilgan integral tenglama yagona yechimga ega hamda bu yechim

$$\varphi(x)=\frac{7\gamma x}{2(3-2\gamma)}+x^2$$

koʻrinishda boʻladi.

Oʻquvchilar mustaqil yechishlari uchun quyidagi masalalarni tavsiya qilamiz.

11-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma(1-x)\int_0^1 t\varphi(t)dt = x^2 - 1$$

integral tenglama $\gamma \in C$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko‘p. Yechim mavjud bo‘lgan hollarda yechimni toping.

12-masala. Ushbu

$$\varphi(x) - \gamma x^2\int_0^1 t^2\varphi(t)dt = x$$

integral tenglama $\gamma \in C$ parametrning qanday qiymatlarida yechimga ega, qanday qiymatlariga yechimga ega emas, qanday qiymatlarida yechim cheksiz ko‘p. Yechim mavjud bo‘lgan hollarda yechimni toping.

Funksional analiz kursida keng qo‘llaniladigan $L_2[-\pi;\pi]$ fazo orqali $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatlarni qabul qiluvchi) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz.

$L_2[-\pi;\pi]$ Hilbert fazosida

$$H_\mu = H_0 - \mu V \qquad (7)$$

ko‘rinishdagi operatorni qaraymiz. Bu yerda H_0 operator $u(\cdot)$ funksiyaga ko‘paytirish operatori

$$(H_0 f)(x) = u(x)f(x), \ \ f \in L_2[-\pi;\pi],$$

V esa qo‘zg‘alish operatori (potensial operatori) bo‘lib,

$$(Vf)(x) = v(x)\int_{-\pi}^{\pi} v(t)f(t)dt, \qquad f \in L_2[-\pi;\pi]$$

ko‘rinishda aniqlangan. Berilgan operatorning $u(\cdot)$ va $v(\cdot)$ parametr funksiyalari $[-\pi;\pi]$ kesmada aniqlangan haqiqiy qiymatli uzluksiz funksiyalar, $\mu \geq 0$ esa ta’sirlashish parametri.

(7) tenglik yordamida aniqlangan H_μ, $\mu \geq 0$ operatorning chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator ekanligi tegishli ta’riflardan foydalanib tekshiriladi.

(7) ko‘rinishdagi operatorga odatda bir o‘lchamli qo‘zg‘alishga ega Fridrixs modeli [3] deyiladi (chunki V operator bir o‘lchamlidir) hamda panjaradagi ikkita zarrachali sistemaga mos model operator [4-10] sifatida qaralishi mumkin.

Ta’kidlab o‘tganimizdek, V qo‘zg‘alish operatori bir o‘lchamlidir. Shu sababli chekli o‘lchamli qo‘zg‘alishlarda muhim spektrning o‘zgarmasligi haqidagi Veyl teoremasidan foydalanib H_μ operatorning muhim spektri H_0 operatorning muhim spektri bilan ustma-ust tushishini hosil qilamiz. H_0 operator $u(\cdot)$ uzluksiz funksiyaga ko‘paytirish operatori bo‘lganligi bois, faqat sof muhim spektrga ega. Aniqroq qilib aytganda,

$$\sigma(H_0) = \sigma_{\mathrm{ess}}(H_0) = [m; M]$$

tengliklar o‘rinlidir. Bu yerda m va M sonlari

$$m := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x), \quad M := \min_{x\in[-\pi;\pi]} u(x)$$

tengliklar yordamida aniqlanadi. Keltirilgan mulohazalarga ko‘ra, H_μ operatorning muhim spektri μ ta’sirlashish parametrdan bog‘liq bo‘lmasdan,

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(H_\mu) = \sigma(H_0) = [m; M]$$

munosabatlar o‘rinlidir.

H_μ operatorning diskret spektrini o‘rganish maqsadida $\mathbb{C}\backslash[m; M]$ sohada regulyar bo‘lgan

$$\Delta_\mu(z) \coloneqq 1 - \mu \int_{-\pi}^{\pi} \frac{v^2(t)dt}{u(t) - z}$$

hamda H_μ operatorga mos Fredgolm determinant deb ataluvchi funksiyani qaraymiz.

Quyidagi lemma H_μ operatorning xos qiymatlari va $\Delta_\mu(\cdot)$ funksiyaning nollari orasidagi bog‘lanishni ifodalaydi.

1-lemma. $z \in \mathbb{C}\backslash[m; M]$ soni H_μ operatorning xos qiymati bo‘lishi uchun $\Delta_\mu(z) = 0$ tenglikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

1-lemmani isbotlashda parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega bo‘lish shartlaridan foydalaniladi. 1-lemmadan H_μ operatorning diskret spektri uchun quyidagi tasdiq kelib chiqadi.

1-tasdiq. H_μ operatorning $\sigma_{\mathrm{disc}}(H_\mu)$ diskret spektri uchun

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(H_\mu) = \{z \in \mathbb{C}\backslash[m; M]: \Delta_\mu(z) = 0\}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shuningdek, H_μ operatorning rezolventasini topishda parametrli chiziqli tenglama yechimga ega bo‘lishining zaruriy va yetarli shartlaridan hamda o‘rniga qo‘yish usulidan unumli foydalaniladi.

Xulosa. Ushbu maqolada o‘quvchiga qulaylik uchun parametrli chiziqli tenglamaning yechimga ega bo‘lmasligi, yagona yechimga ega bo‘lishi, cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lish shartlari keltirilgan. Har bil holga doir bittadan masala yechib ko‘rsatilgan. Bunday ma’lumotlar yordamida zamonaviy matematika masalalarining yechilishiga oid ayrim mulohazalar bayon qilingan. Xususan, parametrli chiziqli tenglamaga keltiriladigan integral tenglamalardan namunaviy masala keltirilgan. Fridrixs modeli deb ataluvchi operatorning spektri va rezolventasini topishga oid mulohazalar bayon qilingan. Keltirilgan ma’lumotlarni qo‘llashga oid o‘quvchilar mustaqil tahlil qilishi uchun bir nechta masalalar taklif qilingan.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Sh.Ismailov va boshqalar. Matematika. 6-sinf [matn]: darslik. Toshkent, Respublika ta’lim markazi, 2022, - 240 b.
2. A.G.Kurosh. Oliy algebra kursi. Toshkent, O‘qituvchi, 1976.
3. K.O.Feriedrichs. Perturbation of spectra in Hilbert space. AMS, 1965, Providence, Rhole Island.
4. S.Albeverio, S.N.Lakaev, Z.I.Muminov. Schroedinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics. Ann. Henri Poincare. 5 (2004), pp. 743-772.
5. Т.Х.Расулов, З.Д.Расулова. Спектр одного трехчастичного модельного оператора на решетке с нелокальными потенциалами. Сибирские электронные математические известия, 12 (2015), С. 168-184.
6. T.H.Rasulov, Z.D.Rasulova. Essential and discrete spectrum of a three-particle lattice Hamiltonian with non-local potentials. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 5:3 (2014), pp. 327-342.
7. Б.И.Бахронов, Т.Х.Расулов, М.Рехман. Условия существования собственных значений трехчастичного решетчатого модельного гамильтониана. Известия вузов. Математика. 7 (2023), С. 3-12.
8. T.H Rasulov, E.B Dilmurodov, Kh.G Khayitova. Spectrum of a three-particle model Hamiltonian on a one-dimensional lattice with non-local potentials. AIP Conf. Proc. 2764 (2023), 030005.
9. T.H Rasulov, B.I Bahronov. Existence of the eigenvalues of a tensor sum of the Friedrichs models with rank 2 perturbation. Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics, 14:2 (2023), pp. 151-157.
10. Т.Х.Расулов. Структура существенного спектра модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия Физико-математические науки. 27:2 (2012), С. 34-43.