Задача Коши для уравнения гиперболического типа второго рода с сингулярным коэффициентом. Обобщенное решение класса R_2

Ахметов Куанишбек Низамаддинович

преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент: don10061992@gmail.com

Тожинорова Махлиё Мурожоновна

преподаватель математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности Рес.УЗ. г. Ташкент: mtojinorova@mail.ru

Аннотация: В этих работах введены и изучены свойства новых классы обобщенных решения, а также приманных этих свойства при решения задачи Коши для вырождающегося уравнения гиперболического типа второго рода и выписывая ее решение в форме, удобной для дальнейших исследовавший различных краевых задач.

Ключевые слова: Задачи Коши и уравнения гиперболического типа второго рода с сингулярным коэффициентом, Обобщенное решение класса R_2

Рассмотрим уравнение

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + \frac{\beta_0}{y} u_y = 0, \quad -1 < m < 0 \qquad (1.32)$$

в конечной односвязной области Ω_2, ограниченной при $y<0$ характеристиками $AB: y=0, \quad 0<x<1,$

$$AC: x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 0, \quad BC: x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} = 1$$

уравнения (1.32), здесь $A = A(0,0),\ B = B(1,0),\ C = C\left(0, -((m+2)/2)^{2/(m+2)}\right)$, а

постоянные m и β_0 удовлетворяют условия

$$-1 < m < 0, \quad -m-1 \le \beta_0 < -m/2. \qquad (1.33)$$

В характеристических координатах

$$\xi = x - \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}, \quad \eta = x + \frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}} \tag{1.34}$$

уравнение (1.32) переходит в уравнение Эйлера-Дарбу[34]

$$u_{\xi\eta} - \frac{\beta}{\eta - \xi}\left(u_\eta - u_\xi\right) = 0, \tag{1.35}$$

где $\beta = \left(m + 2\beta_0\right)/2\left(m+2\right)$ причем

$$-\frac{1}{2} < \beta < 0. \tag{1.36}$$

Через $\Delta_2 = \left\{(\xi,\eta):\ 0 < \xi < 1,\ \xi < \eta < 1\right\}$ обозначим образ области Ω_2 на плоскости (ξ,η).

Известно[34], что решение уравнения (1.35) с начальными данными

$$\lim_{y\to -0} u(x,y) = \lim_{\eta\to\xi} u(\xi,\eta) = \tau(\xi), \quad 0 \le \xi \le 1, \tag{1.37}$$

$$\lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \left[2(1-2\beta)\right]^{-2\beta}\lim_{\eta\to\xi}(\eta-\xi)^{2\beta}\left(u_\xi - u_\eta\right) = \nu(\xi), \qquad 0 < \xi < 1$$

(1.38)

имеет вид

$$u(\xi,\eta) = \gamma_2\int_0^1 \tau(z)t^\beta(1-t)^\beta\,dt +$$

$$+\frac{\gamma_2}{2(1+2\beta)}(\eta-\xi)\int_0^1 \tau'(z)t^\beta(1-t)^\beta(2t-1)\,dt -$$

$$-\gamma_1(\eta-\xi)^{1-2\beta}\int_0^1 \nu(z)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt, \tag{1.39}$$

здесь

$$\gamma_1 = \left[2(1-2\beta)\right]^{2\beta-1}\frac{\Gamma(2-2\beta)}{(1-\beta_0)\Gamma^2(1-\beta)}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma(2+2\beta)}{\Gamma^2(1+\beta)},$$

$$z = \xi + (\eta - \xi)t$$

Переходя к старым переменным (x,y), получим решение задачи Коши для уравнения (1.32) в области Ω_2 с данными (1.37), (1.38) в виде

$$u(x,y)=\gamma_2\int_0^1 \tau(z)t^{\beta}(1-t)^{\beta}\,dt+$$

$$+\frac{2\gamma_2}{(1+2\beta)(m+2)}(-y)^{\frac{m+2}{2}}\int_0^1 \tau'(z)t^{\beta}(1-t)^{\beta}(2t-1)\,dt+$$

$$+\left[2(1-2\beta)\right]^{1-2\beta}\gamma_1(-y)^{1-\beta_0}\int_0^1 \nu(z)t^{-\beta}(1-t)^{-\beta}\,dt\,, \qquad (1.40)$$

где

$$z=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1).$$

Определение 1.3. Если $\tau(x)\in C^3[0,1]$ и $\nu(x)\in C^2[0,1]$, то функция $u(x,y)$, определенная формулой (1.39) или (1.40), является дважды непрерывно дифференцируемым решением задачи Коши для уравнения (1.32) с начальными данными (1.37), (1.38) в области Ω_2.

Определение 1.4. Если $\tau'(x)$ и $\nu(x)$ непрерывны при $0<x<1$, то выражение вида (1.39) или (1.40) будем называть обобщенным решением уравнения (1.32) в области Ω_2.

Определение 1.5. Обобщенным решением класса R_2 будем называть функцию вида (1.39), где $\nu(t)$ непрерывная $(0,1)$ и интегрируема в $[0,1]$ и $\tau(t)$ представима в виде

$$\tau(t)=\tau(0)+\int_0^x (x-t)^{-2\beta}T(t)\,dt, \qquad (1.41)$$

где $T(t)$ непрерывная $(0,1)$ и интегрируема в $[0,1]$ функция.

Из (1.41), нетрудно заключить, что $\tau(t)\in C[0,1]$ и существует $\tau'(t)\in C(0,1)$.

Следовательно, обобщенное решение класса R_2 является обобщенным решением в смысле определение 1.4.

Замечание 1.2. Не ограничения общности, будем считать, что

$$\tau(0)=0\,. \qquad (1.42)$$

При не выполнении этого условия, прибавив к функцию $u(x,y)$ частное решение уравнения (1.32) вида $\upsilon_0(x,y)=a$. Мы можем распорядиться коэффициента a так, что новая функция в точке $(0,0)$ принимает нулевое значение.

Лемма 1.1 [15] [35]. Обобщенное решение $u(\xi,\eta)\in R_2$ обладает следующими свойствами:

1) $u(\xi,\eta)\in C(\overline{\Delta}_2)\cap C^1(\Delta_2)$, $u_{\xi\eta}(\xi,\eta)\in C(\Delta_2)$;

2) $u(\xi,\eta)$ удовлетворяет условиям (1.37), (1.38) и имеет вид

$$u(\xi,\eta)=\int_0^{\xi}(\eta-t)^{-\beta}(\xi-t)^{-\beta}T(t)dt+$$

$$+\int_{\xi}^{\eta}(\eta-t)^{-\beta}(t-\xi)^{-\beta}N(t)dt, \qquad (1.43)$$

где

$$N(t)=\frac{1}{2\cos\pi\beta}T(t)-\gamma_1\nu(t). \qquad (1.44)$$

Доказательство леммы 1.1 приводиться точно также как в работе [35, гл. 5].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gellerstedt S. Sur un probleme aux limitespour equation $y^{2m}z_{xx}+z_{yy}=0$. // Arkiv for matematik, astronomiochfysik. 1935. 25**A.** № 10. P. 1-12.

2. Urinov A.K., Okboev A.B. Nonlocal Boundary-Value Problem for a Parabolic-Hyperbolic Equation of the Second Kind. // Lobachevskii Journal of Mathematics. Vol.41. no. 9. 2020. Pp. 1886–1897 .

3. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.2. 296 с.

4. Бейтмен Г. Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т.1. 296 с.

5. Бицадзе А.В. К теории одного класса уравнений смешанного типа. // Некоторые проблемы математики и механики: Сб. науч. тр. Ленинград, 1970. С. 112-119.

6. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. М.: «Наука». 1966. 204 с.

7. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. Москва: Наука, 1981. 448 с.

8. Бицадзе А.В. Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР. 1959. 165 с.

9. Ватсон Дж. Н. Теория бессолевых функций. М.: Издательство ИЛ, 1949. Т.1. 798 с.

10. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз. 1959. 628 с.

11. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типа. Ташкент: ФАН. 1979. 240 с.

12. Исамухамедов С.С. Некоторые краевые задачи для уравнений смешанного типа второго рода.: Автореф. канд. дисс. Ташкент. 1975.

13. Исамухамедов С.С., Оромов Ж. О краевых задачах для уравнения смешанного типа второго рода с негладкой линией вырождения.// «Дифференциальные уравнения». **18**(2). 1982. С. 324-334.

14. Кароль И.Л. К теории уравнений смешанного типа.// Докл. АН СССР. 1953. Т.88. № 3. С. 397-400.

15. Кароль И.Л. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа. // Докл. АН СССР. 1953. Т.88. № 2. С. 197-200.

16. Келдыш М.В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области. // ДАН СССР. 1951. 77. № 2. С. 181-183.

17. Крикунов Ю.М. Видоизмененная задача Трикоми для уравнения $u_{xx} + yu_{yy} + (-n+1/2)u_y = 0$.// Известия вузов, серия Математика. 1979. № 9. С.21-28.

18. Мамадалиев Н.К. О представления, решения видоизмененной задачи Коши. // Сиб. мат. журнал РАН. **41**(5). 2000. С. 1087-1097.

19. Мамадалиев Н.К. Задача Трикоми для сильно-вырождающегося уравнения параболо-гиперболического типа. // Матем. заметки. **66**(3). 1999. С. 385–392; Math. Notes. **66**:3 (3.1999). 310–315.

20. Мирсабуров М., Исламов Н.Б.Об одной задаче с условием Бицадзе-Самарского на параллельных характеристиках для уравнения смешанного типа второго рода.//«Дифференциальные уравнения». **57** (10). 2021. С.1384-1396.

21. Михлин С.Г. Об интегральном уравнении F.TRICOMI // Докл. АН СССР. 1948. Т.59. № 6. С. 1053-1056.

22. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. С. 512.

23. Николенко В.Н., Хайруллин И.Х., Об одной задаче для уравнения гиперболического типа.// Сб. функц. анализа и теории функций. Казань. 1963. № 1. С. 72-82.

24. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды: Дополнительные главы. М.: Наука. 1986. 801 с.

25. Салахитдинов М.С., ИсамухамедовС.С. Краевые задачи для уравнения смешанного типа второго рода. // Сердика. Бьлгарско математическо списанае. 1977. Т.3. С. 181-188.

26. Салахитдинов М.С., Исламов Н. Б. Нелокальная краевая задача сусловием Бицадзе-Самарскогодля уравнения параболо-гиперболического типа второго рода. // Известия вузов. Математика. Россия. 2015. № 6. С. 43-52.

27. Салахитдинов М.С., Исломов Б.И. Уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения. Т.: «Mumtozso'z». 2009. 264 с.

28. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.

Ташкент: «Universitet». 2005. 224 с.

29. Салахитдинов М.С., Уринов А.К. Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром Т.: «Фан» 1997. 165 с.

30. СалахитдиновМ.С. Уравнения смешанно-составного типа. Ташкент: Фан, 1974. 156 с.

31. Салохитдинов М.С., Уринов А.К. К спектральной теории уравнений смешанного типа. Ташкент. 2010. 356 с.

32. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника. 1987. 688 с.

33. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука. 1966. 292 с.

34. Смирнов М.М. Уравнение смешанного типа. М.: Высшая школа. 1985. 304 с.

35. Смирнов М.М.Уравнения смешанного типа. М.: Наука. 1970. 296 с.

36. Сунн Хе – шен, О единственности решения вырождающихся уравнений и жесткости поверхности. // ДАН СССР. 1958. Т. 122. № 5.

37. Терсенов С.А. Введение в теорию уравнений вырождающихся на границе. НГУ. 1973. 144с.

38. Терсенов С.А. К теории гиперболических уравнении с данными на линии вырождения типа.// Сибирск. матем. журн. 1961.Т. 2. № 6. С.913-935.

39. Терсенов С.А. Об одном уравнении эллиптического типа, вырождающемся на границе области.// ДАН СССР. 1957. 115. № 4. С. 670-673.

40. Трикоми Ф.О. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Ин.лит. 1957. 443с.

41. Фихтингольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. Т.III. 1970. 556 с.

42. Франкль Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973. 711 с.

43. Франкль Ф.И. О задачах Чаплыгина для смешанных до- и сверхзвуковых течений. // Изв. АН СССР сер.матем. **9**(2). 1945. С. 121-142.

44. Хайруллин Р.С. Задача Трикоми для уравнения второго рода с сильным вырождением. 2015. Казань. 236 с.

45. ХоуЧунь - и, ЗадачаДирехле для одного класса линейных эллиптических уравнений второго порядка с параболическим вырождением на границе области.// Sc. Rec. new. Ser., 1958. 2. № 8. 244-249.

46. ЧеньЛян – цзинь (Chen Liang - jing), A boundary value problem for the degenerated elliptic equation.// Acta Math. Sinica, 1963. 13. № 3. 332-342.

47. ЯнГуан – цзинь (Yang Quang - jing), Dirichlet problem for a class of equations of degenerated elliptic type.// Acta Math. Sinica. 1962. 12. № 1. 40-46.